Bull. Sci. math.
1998, 122, p. 399-408.

VALEURS PROPRES D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS DU SECOND ORDRE SUR UNE VARIÉTÉ DE FINSLER

PAR

CHRISTINE BERTRAND et ANTOINE RAUZY(*)

[Université P. et M. Curie]

RÉSUMÉ. – On construit successivement un laplacien sur une variété de Finsler et un opérateur hypo-elliptique sur le fibré unitaire. On donne ensuite via une formule de type Bochner, une borne inférieure de la première valeur propre de ces opérateurs en fonction du tenseur de Ricci horizontal de la connexion de Berwald. © Elsevier, Paris

ABSTRACT. – We construct a Laplacian on a Finsler manifold and a subelliptic operator on the associated unitary bundle. Through a Bochner-type formula, under appropriate conditions, a lower bound of the first eigenvalue of these operators is given by means of the horizontal Ricci tensor of the Berwald connection. © Elsevier, Paris

1. Définitions et position du problème

Soit (M, L) une variété Finslérienne de dimension n, compacte et sans bord. On note TM son espace tangent, p la projection canonique de TM sur M et E l'ouvert de TM obtenu en privant TM de sa section nulle.

Soit (x^i) pour i variant de 1 à n, une carte subordonnée à un ouvert U de M. On considère la trivialisation locale de TM associée à cette carte. Si $x \in U$ et si z est un point de T_xM, on a $z \sim (x, v)$ avec $v = v^i$ et $z = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. (x^i, v^i) est alors un système

(*) Texte présenté par B. GAVEAU, reçu en décembre 1996.
Christine BERTRAND, 8 place Paul Verlaine, 75013 Paris.
A. RAUZY, 16 rue des Saints-Pères, 75007 Paris.
e-mail: rauzy@math.jussieu.fr.

de coordonnées locales sur E et on considère de la même façon la trivialisation associée à cette carte sur TE.

Le lagrangien L est une fonction C^∞ sur E à valeurs dans $\mathbf{R}^{+*}$, il vérifie $L(x, tv) = t\, L(x, v)$ pour tout t dans $\mathbf{R}^{+*}$. De plus la matrice $g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial v^i \partial v^j}$ est celle d'une forme bilinéraire définie positive.

On considère $p^{-1}TM$ le fibré vectoriel sur E image réciproque de TM par $p_{|E}$. La fibre au-dessus du point $z \sim (x, v)$ de E est $p^{-1}TM_z = T_x M$. La définition de $p^{-1}TM$ permet de mettre en évidence d'une part une application linéaire canonique ρ de TE dans $p^{-1}TM$, si $\widehat{X} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b^j \frac{\partial}{\partial v^j}$, i et j variant de 1 à n, on a $X = \rho(\widehat{X}) = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. D'autre part, $p^{-1}TM$ admet une section canonique non triviale σ qui s'écrit en trivialisation locale $\sigma(x, v) = (x, v, v)$ [1].

Soit ∇ une connexion sur $p^{-1}TM$ c'est-à-dire une application de l'espace des sections de $p^{-1}TM$ noté $\mathcal{S}(p^{-1}TM)$ dans $\mathcal{S}(p^{-1}TM) \otimes \mathcal{S}(T^*E)$. ∇ est dite régulière [2] si, pour tout z dans E, l'application linéaire de $T_z E$ dans $p^{-1}TM_z = T_x M (x = p(z))$ qui à $\widehat{X}$ associe $\nabla_{\widehat{X}} \sigma$ (σ étant la section canonique) définit un isomorphisme de l'espace vertical en z, $\mathcal{V}_z = \ker Tp_{|z}$, sur $T_x(M)$. Dans ce cas, en notant $\mathcal{H}_z$ le noyau de l'application $\widehat{X} \to \nabla_{\widehat{X}} \sigma$, on a $T_z E = \mathcal{H}_z \oplus \mathcal{V}_z$ et $\mathcal{H}_z$ est isomorphe par $Tp_{|z}$ à $T_x M$. Pour tout z dans E, $\mathcal{H}_z$ est appelé espace horizontal en z.

Parmi les trois connexions régulières le plus souvent utilisées, celles de CARTAN-FINSLER (∇^F), de BERWALD (∇^B), et de CHERN (∇^C) [4], qui définissent la même distribution d'espaces horizontaux, on s'intéressera plus particulièrement à la connexion de Berwald. L'objet de cette note est de construire des opérateurs intervenant dans des équations aux dérivées partielles d'origine géométrique.

Coefficients de connexion. – On considère une base de sections locales de TE formée des champs de vecteurs horizontaux ∂_i (i de 1 à n) définis par $\rho(\partial_i) = \frac{\partial}{\partial x^i}$ (et naturellement $\nabla_{\partial_i} \sigma = 0$) et des champs de vecteurs verticaux $\frac{\partial}{\partial v^j}$ (j de 1 à n), comme $\sigma^l(x, v) = v^l$, on a $\nabla_{\frac{\partial}{\partial v^i}} \sigma = \frac{\partial}{\partial x^i}$. On notera dx^i et ∇v^j la base duale de sections locales de T^*E.

On pose $\Gamma^*_{lij} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$, $\Gamma^{*k}_{ij} = g^{lk} \Gamma^*_{lij}$, $T_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v^k} g_{ij}$ et $[\partial_i, \partial_j] = -R^k{}_{0ij} \frac{\partial}{\partial v^k}$.

Ces différentes grandeurs sont liées à la connexion métrique de Finsler (coefficients de connexion, torsion et courbure respectivement). En particulier on a $\nabla_l^F T^i_{jk} = \partial_l T^i_{jk} + \Gamma^{*i}_{ml} T^m_{jk} - \Gamma^{*m}_{jl} T^i_{mk} - \Gamma^{*m}_{kl} T^i_{jm}$. On note par l'indice 0 la contraction d'un tenseur par la section σ ou $\rho^{-1}(\sigma)$ suivant le contexte sans qu'il puisse y avoir d'ambigüité.

De $\nabla^F \partial_i \sigma = 0$ on déduit $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - v^l \Gamma^{*k}_{li} \frac{\partial}{\partial v^k} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^{*k}_{0i} \frac{\partial}{\partial v^k}$.

Les coefficients de la connexion sans torsion de Berwald sont donnés par $\nabla^B_{\partial_i} \frac{\partial}{\partial x^j} = G^k_{ji}$ avec $G^k_{ji} = \Gamma^{*k}_{ji} - \nabla^F_0 T^k_{ij}$. En ce qui concerne les directions verticales, on a $\nabla^B_{\frac{\partial}{\partial v^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0$.

La décomposition de TE permet d'obtenir sur E une métrique riemannienne G à partir des g_{ij} qui définissent un tenseur deux fois covariant de $p^{-1}TM$: $ds^2 = G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} \nabla v^i \otimes \nabla v^j$. On munit TE de la connexion D de Levi-Civitá. Ses coefficients sont donnés par [3] $\widehat{\Gamma}^k_{ji} = \Gamma^{*k}_{ji}$, $\widehat{\Gamma}^k_{\overline{lm}} = \nabla^F_0 T^k_{lm}$, $\widehat{\Gamma}^k_{\overline{l}i} = \widehat{\Gamma}^k_{i\overline{l}} = T^k_{il} - \frac{1}{2} R_{l0}{}^k{}_i$, $\widehat{\Gamma}^{\overline{h}}_{i\overline{l}} = \nabla^F_0 T^h_{il}$, $\widehat{\Gamma}^{\overline{h}}_{ij} = -T^h_{ij} + \frac{1}{2} R^h{}_{0ij}$, $\widehat{\Gamma}^{\overline{h}}_{\overline{lm}} = T^h_{lm}$. De façon générale l'indice h désigne la direction ∂_h (sur TE) ou $\frac{\partial}{\partial x^h}$ (sur $p^{-1}TM$), $\overline{h}$ designant la direction $\frac{\partial}{\partial v^h}$.

2. Un opérateur elliptique sur la variété

Le fibré unitaire SM est l'image de E par l'application π de E dans E telle que $\pi((x,v)) = (x, \frac{v}{L(x,v)})$, c'est une submersion et SM s'identifie à la sous-variété de TM des vecteurs de norme 1, elle est munie de la structure riemanienne induite de celle de E.

Soient alors d_s la différentielle sur SM, δ_s et Δ_s respectivement la divergence et le laplacien correspondant à d_s via la structure riemanienne.

Sur M, soit f une fonction C^∞, on définit l'intégrale de f par $\int_M f = \int_{SM} \overline{f} \eta$ où $\overline{f}$ est le relèvement de $f(\overline{f}(x,v)) = f(x))$ sur SM et η est la forme de volume riemanienne sur $SM(\eta = \pi^*(\det(g) dx \Lambda dv))$. Soient alors α et β deux p-formes sur M, on peut les considérer comme deux p-formes sur $p^{-1}TM$ par $\alpha(x,v) = \alpha(x)$ et noter $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ leurs relèvements horizontaux sur SM. Par définition $\overline{\alpha} = e^* \alpha$, $\langle \overline{\alpha}, \widehat{X} \rangle = \langle \alpha, \rho(\widehat{X}) \rangle$, ou encore si $\alpha = \alpha_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots dx^{i_p}$, $\overline{\alpha}(x,v) = \alpha_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots dx^{i_p}$, la notation dx^i représentant la forme duale de $\frac{\partial}{\partial x^i}$ sur $p^{-1}TM$ et ∂_i sur SM. On pose $\langle \alpha, \beta \rangle_M = \langle \overline{\alpha}, \overline{\beta} \rangle_{SM}$ où $\langle \overline{\alpha}, \overline{\beta} \rangle_{SM}$ est le produit scalaire riemannien de deux p-formes défini par $\langle \overline{\alpha}, \overline{\beta} \rangle_{SM} = \int_{SM} \overline{\alpha} \wedge * \overline{\beta}$, $*\overline{\beta}$ désignant l'adjoint riemannien de $\overline{\beta}$.

Il est clair que $\langle\ ,\ \rangle_M$ définit un produit scalaire sur $\Omega^*(M)$. On note d_M la différentielle sur M, on appelle δ_M l'opérateur adjoint de d_M pour ce produit scalaire.

On a clairement $\overline{d_M\alpha} = d_s\overline{\alpha}$, et on vérifie alors que l'opérateur adjoint de d_M est δ_M donné par $\delta_M(\alpha)_{j_1j_2\cdots j_{p-1}} = \dfrac{\int_{S_x}[\delta_s\overline{\alpha}]_{j_1j_2\cdots j_{p-1}}\sqrt{|\det(g)|}\eta_{S_x}}{\int_{S_x}\sqrt{|\det(g)|}\eta_{S_x}}$ où l'intégration est faite sur la fibre S_x de SM en x, d'élément de volume η_{s_x} correspondant à la métrique riemanienne induite par G sur la fibre et où les $[\delta_s\overline{\alpha}]_{j_1j_2\cdots j_{p-1}}$ désignent les composantes horizontales d'indices $j_1, j_2\cdots j_{p-1}$ de $\delta_s\overline{\alpha}$.

On définit alors le laplacien sur la variété M pour une forme $\alpha\in\Omega^*(M)$ par $\Delta_M\alpha = d_M\delta_M\alpha + \delta_M d_M\alpha$ (pour une définition distincte d'un laplacien sur M, on renvoie à [5]).

Si f est une fonction

$$\Delta_M f = \delta_M d_M f = \delta_M d_s\overline{f} = \frac{\int_{s_x}[\delta_s d_s\overline{f}]\sqrt{|\det(g)|}\eta_{s_x}}{\int_{s_x}\sqrt{|\det(g)|}\eta_{s_x}}$$
$$= \frac{\int_{s_x}\Delta_s\overline{f}\sqrt{|\det(g)|}\eta_{s_x}}{\int_{s_x}\sqrt{|\det(g)|}\eta_{s_x}}$$

On en déduit la propriété $\int_M\Delta_M f = \int_{SM}\Delta_s\overline{f}$.

En effet

$$\int_M\Delta_M f = \int_{SM}\overline{\Delta_M f}\,\eta \text{ (par définition)}$$
$$= \int_M\overline{\Delta_M f}\Big(\int_{S_xM}\det(g)\pi^*(\nabla v^1\wedge\nabla v^2\cdots\wedge\nabla v^n)\Big)dx^1\wedge dx^2$$
$$\cdots\wedge dx^n \text{ car } \overline{\Delta_M f} \text{ ne dépend pas de } v$$
$$= \int_M\Delta_s\overline{f}\Big(\int_{s_xM}\sqrt{\det(g)}\,\eta_x\Big)dx = \int_{SM}\Delta_s\overline{f}.$$

Par ailleurs $\int_M f\Delta_M f = \int_{SM}\overline{f}\ \overline{\Delta_s f}\,\eta$.

Ces différentes propriétés permettent d'obtenir la proposition suivante :

PROPOSITION. – *L'opérateur Δ_M est le Laplacien défini à partir de la différentielle d_s et du produit scalaire sur $\Omega^*(M)$. Il vérifie les propriétés ci-dessous :*

(a) *Il est elliptique et auto-adjoint.*

(b) *Il existe une décomposition de Hodge de $\Omega^*(M)$. C'est-à-dire que toute p-forme sur M se décompose sous la forme $\alpha = \delta_M \beta + d_M \gamma + H(\alpha)$ où $\beta \in \Omega^{*p+1}(M)$, $\gamma \in \Omega^{*p-1}(M)$ et où $H(\alpha)$ est harmonique* (i.e. $\Delta_M H(\alpha) = 0$).

(c) *Les valeurs propres non nulles de ce laplacien sont minorées par la plus petite des valeurs propres du laplacien riemannien Δ_S.*

Preuve. – (a) découle de la définition, pour (b) voir le théorème de WELLS [6]. Pour le (c), on a $\int_M |d_M f|^2 = \int_{SM} |d_s \overline{f}|^2$ et $\int_M f = \int_{SM} \overline{f}$. Comme la première valeur propre non nulle du laplacien Δ_M est définie par le minimum de la fonctionnelle $\frac{\int_M |d_M f|^2}{\int_M f^2}$ pour les fonctions $f \in C^\infty(M)$ vérifiant $\int_M f = 0$ et que l'on a une formule analogue dans le cas de la première valeur propre du laplacien Δ_S en remplaçant M par S le résultat est immédiat.

3. Un opérateur auto-adjoint sous-elliptique

On s'intéresse maintenant au cas où le fibré unitaire SM est sous-riemannien, c'est-à-dire que l'algèbre de Lie des champs d'espaces horizontaux est le fibré tangent TSM. On vérifie facilement que $[\partial_i, \partial_j] \in [v^i \frac{\partial}{\partial v^i}]^\perp$, donc est un élément de TSM. Un exemple simple de cette situation se rencontre dans le cas des variétés isotropes à courbure sectionnelle constante [2]. Dans ce cas, $\partial_i f = 0$ pour i de 1 à n entraîne f = constante. Il est alors légitime de se demander si les grandeurs définies sur les horizontaux suffisent à décrire entièrement la variété.

Définition d'une différentielle horizontale. – L'application ρ de TE sur $p^{-1}TM$ définie au premier paragraphe, induit un isomorphisme des horizontaux de $T_z E = \mathcal{H}_z$ sur $p^{-1}TM_z$. On dispose donc d'une application de $p^{-1}TM$ dans les horizontaux de TE puis par composition avec l'injection d'une application de $p^{-1}TM$ dans TE. Soit ρ^{-1} l'application ainsi définie (localement $\rho^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \partial_i$). Comme, par ailleurs, les horizontaux de TE s'identifient à ceux de TSM, la restriction de l'application ρ à TSM que l'on note toujours ρ peut s'interpréter comme la projection horizontale de TSM définie comme étant l'identité des horizontaux de TSM et l'application nulle sur les verticaux. On définit alors ρ^* l'application de $\mathcal{S}(p^{-1}TM^*)$ dans $\mathcal{S}(TSM^*)$ par $\forall \alpha \in \mathcal{S}(p^{-1}TM^*)$, $\forall X \in TSM$, $\rho^*(\alpha)(X) = \alpha(\rho(X))$. $\rho^*(\alpha)$

est le relèvement horizontal de α, on notera $\overline{\alpha} = \rho^*(\alpha)$. De même on a la projection horizontale $\rho^{-1*}(\beta) \in \mathcal{S}(p^{-1}TM^*)$ d'une section $\beta \in \mathcal{S}(TSM^*)$: $\forall Y \in p^{-1}TM$, $\rho^{-1*}(\beta)(Y) = \beta(\rho^{-1}(Y))$.

On définit alors un opérateur différentiel d_H, différentielle horizontale sur les formes de $\Omega^*(p^{-1}TM^*)$, par $d_H\alpha = \rho^{-1*}d_S(\overline{\alpha})$, d_S désignant toujours la différentielle sur SM.

Si $\alpha = \sum_{p=1}^{n} \alpha_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x,v)dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$, on obtient $d_H(\alpha) = \sum_{p=1}^{n} \partial_i(\alpha_{i_1 i_2 \cdots i_p})(x,v)dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$. On note alors δ_H la pseudo-divergence associée à d_H par la structure riemannienne sur SM et on vérifie que $\forall\alpha \in \Omega^*(p^{-1}TM)$, $\delta_H\alpha = \rho^{-1*}[\delta_S\rho^*(\alpha)]$, où δ_S est la divergence riemannienne sur $\Omega^*(SM)$.

Dérivées successives et opérateur sous-elliptique. – Pour un champ de tenseurs T de $p^{-1}TM$, on définit l'opérateur $L_H T = -g^{ij}(\nabla^B_{\partial_i}\nabla^B_{\partial j} - \nabla^B_{D_{\partial_i}\partial j})(T)$. Dans une carte $L_H T = -\nabla^{B^i}\nabla^B_i T$ la somme s'entendant de 1 à n, ∇^B_i signifiant $\nabla^B_{\partial_i}$, $\nabla^{Bj} = g^{ij}\nabla^B_{\partial_i}$. On rappelle que la connexion de Berwald n'est pas métrique.

Remarque. – Sur un fibré vectoriel V de base E muni d'une connexion ∇, la donnée d'une connexion D sur TE permet d'itérer la dérivation covariante (via ∇) des champs de tenseurs de V.

Pour cela, on définit un opérateur B qui possède les propriétés suivantes :

– Si A est une puissance tensorielle du fibré V et de son dual V^*, et si T est une section de A, $B(T) \in \mathcal{S}(A) \otimes \mathcal{S}(T^*E)$ et $BT = \nabla T$.

– Si f est une fonction sur E, $Bf = df$, la différentielle de f.

– Si τ est un champ de tenseurs sur E, $B\tau = D\tau$.

– B respecte la règle de Leibniz relativement au produit tensoriel, en particulier $B(T \otimes \tau) = \nabla(T) \otimes \tau + T \otimes D(\tau)$.

On vérifie alors que l'opérateur $L_H T$ défini plus haut n'est autre que $g^{ij}B^2(T)(\partial_i \otimes \partial_j)$. En effet $B(T) = \nabla_a T \otimes dx^a$ où les $B_a T$ sont des tenseurs de même nature que T, et où dx^a désignent dx^a pour a de 1 à n et $\nabla v^{(a-n)}$ pour a de $n+1$ à $2n$.

Donc $BB(T) = \nabla_b\nabla_a T \otimes dx^a \otimes dx^b + \nabla_a T \otimes D_b dx^a \otimes dx^b = \nabla_b\nabla_a T \otimes dx^a \otimes dx^b - \widehat{\Gamma}^a_{cb}\nabla_a T \otimes dx^c \otimes dx^b = \nabla_b\nabla_a T \otimes dx^a \otimes dx^b - \widehat{\Gamma}^c_{ab}\nabla_c T \otimes dx^a \otimes dx^b = \nabla_b\nabla_a T \otimes dx^a \otimes dx^b - \nabla_{D(\partial_b)}T \otimes dx^a \otimes dx^b$, d'où le résultat.

On définit alors la courbure horizontale de la variété par $H(\widehat{X}, \widehat{Y})Z = \nabla_{HX}\nabla_{HY}Z - \nabla_{HY}\nabla_{HX}Z - \nabla_{[HX,HY]Z}$, si Z désigne une section de $p^{-1}TM$, $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ des champs de vecteurs de TE et HX et HY leurs projections horizontales respectives.

En posant $HX = X^i\partial_i$, $HY = Y^j\partial_j$ et $Z = Z^k\frac{\partial}{\partial x^k}$, $H(\widehat{X}, \widehat{Y})Z = H^l_{kij}X^iY^jZ^k\frac{\partial}{\partial x^l}$, avec $H^l_{kij} = [\partial_i G^l_{kj} - \partial_j G^l_{ki}] + [G^l_{bi}G^l_{kj} - G^l_{bj}G^b_{ki}]$, et $\partial^i f = g^{ij}\partial_i f$.

On notera $Hic_{kl} = H^m_{kml}$, cet opérateur définit une forme bilinéaire symétrique sur les sections de $p^{-1}TM$ et par l'intermédiaire du tenseur métrique g sur les sections de $p^{-1}TM^*$, on notera indifféremment $Hic(\alpha, \beta)$ ou $Hic(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ si $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ désignent les champs de vecteurs associés à α et β. Soit α une forme de $p^{-1}TM^*$, $Hic(\alpha, \alpha) = Hic_{ij}\alpha^i\alpha^j = Hic^{ij}\alpha_i\alpha_j = g^{jk}\alpha^i[\nabla^B_j\nabla^B_i\alpha_k - \nabla^B_i\nabla^B_j\alpha_k - \nabla^B_{[\partial_j,\partial_i]}\alpha_k]$.

On a naturellement, pour une fonction f sur SM, $L_H f = \delta_H(d_H f)$. Si on considère φ une forme de $S(TSM^*)$, il est naturel de comparer $L_H\varphi$ à $[\delta_H d_H + d_H\delta_H]\varphi$. On obtient : $[\delta_H d_H + d_H\delta_H]\varphi - L_H\varphi = [Hic^k_j\varphi_k + g^{km}[\partial_j, \partial_m]\varphi_k - T^m\nabla^B_{\overline{m}}\varphi_j - \nabla_0 T^m\nabla^B_m\varphi_j + 2\nabla_0 T^{ki}_j\nabla^B_i\varphi_k]dx^j$ que l'on démontre à l'aide de la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ. – *On vérifie facilement que si α est une 1-forme sur M, donc un élément de $S(p^{-1}TM^*)$ par $\alpha(x, v) = \alpha(x)$ et que l'on désigne par $\overline{\alpha}$ son relevé horizontal sur TE, on a $\nabla^{B^i}(\alpha_i) = D^a\overline{\alpha}_a = -\delta_s\overline{\alpha}$, l'indice a courant de 1 à $2n$.*

De $\nabla^{B^i}(\alpha_i) = D^a\overline{\alpha}_a$, on déduit immédiatement :

COROLLAIRE. – *La plus petite des valeurs propres non nulle de l'opérateur L_H minore la plus petite des valeurs propres du laplacien Δ_M défini au paragraphe 2 ci-dessus.*

Une formule de type Bochner pour l'opérateur L_H. – Soit ζ la forme de $p^{-1}TM^*$ définie par $\zeta_i = \alpha^m\nabla^B_m\alpha_i$, sa dérivée covariante est donnée par

$$\begin{aligned}\nabla^B_j\zeta_i &= \nabla^B_j\alpha_m\nabla^{B^m}\alpha_i + \nabla^B_j(g^{mk})\alpha_k\nabla^B_m\alpha_i + \alpha^m\nabla^B_j\nabla^B_m\alpha_i \\ &= \nabla^B_j\alpha_m\nabla^{B^m}\alpha_i + \alpha^m\nabla^B_j\nabla^B_m\alpha_i + 2\nabla_0 T^{mk}_j\alpha_k\nabla^B_m\alpha_i.\end{aligned}$$

Soit de même ξ la forme de $p^{-1}TM^*$ définie par

$$\begin{aligned}&\xi_i = \alpha_i\nabla^{B^m}\alpha_m, \\ &\nabla^B_j\xi_i = \nabla^B_j\alpha_i\nabla^{B^m}\alpha_m + \alpha_i g^{ml}\nabla^B_j\nabla^B_l\alpha_m + 2\nabla_0 T^{ml}_j\alpha_i\nabla^B_l\alpha_m.\end{aligned}$$

En contractant par g^{ij} et en soustrayant, on obtient :

$$\delta_s\overline{\xi} - \delta_s\overline{\zeta} = \nabla^{B^i}\zeta_i - \nabla^{B_i}\xi_i = \alpha^m\nabla^{B_i}\nabla^B_m\alpha_i - \alpha_i g^{ml}\nabla^{B_i}\nabla^B_l\alpha_m + \nabla^{B_i}\alpha_m\nabla^{B^m}\alpha_i - (\nabla^{B^m}\alpha_m)^2.$$

Les termes en T disparaissent du fait de la symétrie de T^{ijk} et de $\nabla_0 g^{ij} = 0$.

Par ailleurs le calcul donne $\nabla^B_{[\partial_j,\partial_i]}\alpha_l = -R^m_{0ij}\nabla^B_{\overline{m}}\alpha_l$, et on obtient :

$$\begin{aligned} Hic(\alpha,\alpha) &= \nabla^{B^i}\zeta_i - \nabla^{B_i}\alpha_m\nabla^{B^m}\alpha_i + (\nabla^{B^m}\alpha_m)^2 + R^m{}_0{}^{ij}\alpha_i\nabla^B_{\overline{m}}\alpha_j \\ &= D^a\zeta_a - D^a\xi_a - \nabla^{B_i}\alpha_m\nabla^{B^m}\alpha_i + (\nabla^{B^m}\alpha_m)^2 \\ &\quad + R^m{}_0{}^{ij}\alpha_i\nabla^B_{\overline{m}}\alpha_j. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où α est la différentielle horizontale d'une fonction sur M, $\alpha = d_H f$, posons $\alpha' = \frac{\partial f}{\partial v^j}dx^j$. On a $\nabla^B_{\overline{m}}\alpha_j = \frac{\partial}{\partial v^m}\partial_j f = \partial_j(\frac{\partial}{\partial v^m}f) - [\partial_j, \frac{\partial}{\partial v^m}](f) = \partial_j\alpha'_m + G^k_{jm}\alpha'_k = \nabla^B_j\alpha'_m$.

Ainsi $R^m{}_{0ij}\nabla^B_{\overline{m}}\alpha_k = R^m{}_{0ij}\nabla^B_k\alpha'_m$.

On en déduit $\nabla^{B_i}[R^m{}_{0ij}\alpha'_m\alpha^j] = \nabla^{B_i}[R^m{}_{0i}{}^j]\alpha'_m\alpha^j + R^m{}_0{}^{ij}\alpha'_m\nabla^B_i\alpha_j + R^m{}_0{}^{ij}\nabla^B_i[\alpha'_m]\alpha_j$.

Or par antisymétrie sur les indices i et j, on a :

$$R^m{}_0{}^{ij}\alpha'_m\nabla^B_i\alpha_j = \frac{1}{2}R^m{}_0{}^{ij}\alpha'_m[\nabla^B_i\alpha_j - \nabla^B_j\alpha_i] = \frac{1}{2}R^m{}_0{}^{ij}R^k{}_{0ij}\alpha_m\alpha'_k.$$

Et donc en posant $\chi_i = R^m{}_{0ij}\alpha'_m\alpha^j$ que l'on considère comme une section de $p^{-1}TM^*$, on obtient : $R^m{}_0{}^{ij}\nabla^B_i[\alpha'_m]\alpha_j = D^a\chi_a + \frac{1}{2}R^m{}_0{}^{ij}R^k{}_{0ij}\alpha'_m\alpha'_k - \nabla^{B_i}[R^m{}_{0i}{}^j]\alpha'_m\alpha^j$, où l'indice a court de 1 à $2n$ et évidemment $D^a\chi_a = -\delta_s\chi$.

Par ailleurs comme $L_H f = \delta d_H f$, on démontre la formule de type Bochner suivante :

$$\begin{aligned} (L_H f)^2 = Hic(d_H f, d_H f) &- \frac{1}{2}R^m{}_0{}^{ij}R^k{}_{0ij}\frac{\partial f}{\partial v^m}\frac{\partial f}{\partial v^k} \\ &+ \nabla^{B_i}(d_H f)_m\nabla^{B^m}(d_H f)_i \\ &+ \nabla^{B_i}[R^m{}_{0i}{}^j]\frac{\partial f}{\partial v^m}\partial_j f - \delta_S\zeta + \delta_S\xi - \delta_S\chi \end{aligned}$$

ou encore, en appelant S le tenseur sur $p^{-1}TM$ défini par $S_{\underline{\underline{mk}}} = -\frac{1}{2}R^m{}_0{}^{ij}R^k{}_{0ij}$ et en notant $\overline{\overline{S}}$ son relevé vertical sur SM : $\overline{\overline{S}} =$

$\pi^{*-1}(S_{ij}\nabla v^i \otimes \nabla v^j)$, $\overline{H}ic$ le relevé horizontal sur SM du tenseur Hic et $\nabla_{SM} f$ le gradient sur SM de f, $(\nabla_{SM} f)^a = G^{ab}(d_{SM} f)_b$, on obtient :

$$(*)\quad (L_H f)^2 = (\overline{H}ic + \overline{\overline{S}})(\nabla_{SM} f, \nabla_{SM} f) + \nabla^{B_i}(d_H f)_m \nabla^{B^m}(d_H f)_i + \nabla^{B_i}[R^m{}_{0i}{}^j]\frac{\partial f}{\partial v^m}\,\partial_j f - \delta_s\zeta + \delta_s\xi - \delta_s\chi.$$

Une estimation des valeurs propres de L_H. – Cette formule permet d'obtenir l'équivalent du théorème de A. LICHNEROWICZ sur ces variétés Finslériennes :

PROPOSITION. – *Si la variété (M, L) est telle que L_H soit sous-elliptique et $\nabla^{B_i}[R^m{}_{0i}{}^j] = 0$, et est telle qu'il existe un $c > 0$ tel que, pour tout X de TSM, de projection horizontale X_H, on ait : $(\overline{H}ic + \overline{\overline{S}})(X, X) \geq cg(X_H, X_H)$, alors toutes les valeurs propres non nulles de L_H sont supérieures ou égales à c.*

Preuve. – On a

$$\int_{SM}(L_H f)^2 = \langle\delta\overline{d_H f}, \overline{d_H f}\rangle_{SM} = \langle\overline{d_H f}, d\delta\overline{d_H f}\rangle_{SM} = \langle\overline{d_H f}, d_H\overline{L_H f}\rangle_{SM}$$

et donc

$$\int_{SM}(L_H f)^2 = \int_{SM}(\overline{Hic} + \overline{\overline{S}})(\nabla_{SM} f, \nabla_{SM} f) + \int_{SM}\nabla^{B_i}(d_H f)_j \nabla^{B_j}(d_H f)_i + \int_{SM}\nabla^{B_i}(R^m{}_{0i}{}^j)\frac{\partial f}{\partial v^m}\,\partial_j f$$

or, d'après l'hypothèse $\nabla^{B_i}[R^m{}_{0i}{}^j] = 0$ et naturellement $\nabla^{B_i}(d_H f)_m \nabla^{B_m}(d_H f)_i \geq 0$ en tout point de E, on en déduit $\langle\overline{d_H f}, d_H\overline{L_H f}\rangle_{SM} \geq \int_{SM}(\overline{Hic} + \overline{\overline{S}})(\nabla_{SM} f, \nabla_{SM} f)$. Ainsi si λ est une valeur propre de l'opérateur L_H et f une fonction propre C^∞ sur E, attachée à la valeur propre λ, on obtient $\langle\overline{d_H f}, d_H\overline{L_H f}\rangle_{SM} = \lambda\langle\overline{d_H f}, \overline{d_H f}\rangle_{SM} \geq \int_{SM}(\overline{Hic} + \overline{\overline{S}})(\nabla_{SM} f, \nabla_{SM} f)$.

Comme $\nabla_H f$ le projeté horizontal de $\nabla_{SM} f$ est tel que $g_{ij}\nabla^i_H f \nabla^j_H f = G^{ab} d_{Ha} f d_{Hb} f$, la conclusion s'en déduit.

RÉFÉRENCES

[1] AKBAR-ZADEH (H.). – Les espaces de Finsler et certaines de leurs généralisations, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 3e Série, **80**, 1963, p. 1-79.

[2] AKBAR-ZADEH (H.). – Sur les espaces de Finsler à courbure sectionnelle constante, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.*, 5e Série, **LXXIV**, 1988 (10), p. 281-322.

[3] AKBAR-ZADEH (H.). – Generalized Einstein Manifolds, *J. of Geom. and Phys.*, **17**, 1995, p. 381-390.

[4] BAO (D.) and CHERN (S.S.). – On a notable connection in Finsler geometry, *Houston J. Math.*, **19** (1), 1993, p. 135-180.

[5] BAO (D.) and LACKEY (B.). – A Hodge decomposition theorem for Finsler Spaces, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **t. 323**, Série 1, 1996, p. 51-56.

[6] WELLS (R.O.). – *Differential analysis on complex manifolds*, 2e édition. – Berlin, Springer-Verlag, 1980.